ANNEE 2001

CONCOURS D'ADMISSION

A

L'ECOLE DE L'AIR

CONCOURS MP

DEUXIÈME ÉPREUVE
DE
MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Coefficient : 14

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

T.S.V.P.

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormal, on considère la surface S d'équation : $X(X^2+Y^2+Z^2-1)+Y^2-Z^2=0$.

1. Montrer que l'intersection de S avec le plan d'équation Z = 0 est formée d'un cercle et d'une droite qu'on précisera.

2. Quelle est l'intersection de S avec le plan d'équation Y = 0 ?

3.
   - Montrer que les points de S ont tous leur abscisse X dans l'intervalle $[-1,1]$;
   - Inversement, est-ce que tout réel de $[-1,1]$ est abscisse d'un point de S ?
   - Préciser la nature de la courbe intersection de S avec le plan d'équation X = a, pour $-1 \le a \le 1$.

4. Quelles sont les droites contenues dans la surface S ?

5. Montrer que la composée f de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation X = 0 et d'une rotation d'un quart de tour autour de l'axe OX réalise une bijection de S sur elle-même.

6. Déterminer les isométries préservant S.

7. Préciser la nature des intersections de S avec les plans kZ = X + 1. En déduire la nature des intersections de S avec les plans kY = 1 - X.

8. Préciser la nature des intersections de S avec les plans kX = Z - Y et avec les plans kX = Z + Y.

9. Donner quatre cercles tracés sur S passant par le point de coordonnées X = 1/2, Y = 1, Z = 3/2.

10. Quelle est la projection orthogonale de la surface S sur le plan Z = 0 ?

11. Dessiner approximativement l'intersection de S avec le plan d'équation Z = 1/2. Préciser ses tangentes au point $(-1/2,0,1/2)$.

12. Montrer que les points de S sont tous réguliers.

13. Montrer que si M_0 de coordonnées rationnelles (x_0,y_0,z_0) et M_1 de coordonnées rationnelles (x_1,y_1,z_1) sont deux points de S, avec $-1 \le x_0 < x_1 \le 1$, la droite M_0M_1 recoupe S en un point à coordonnées rationnelles, à moins qu'elle ne soit tangente à S en M_0 ou M_1.